

新型冠状病毒肺炎传播动力学模型构建与分析

于振华^{1,2}, 黄山阁^{1,2}, 杨波³, 高红霞^{1,2}, 卢思^{1,2}

(1. 西安科技大学计算机科学与技术学院, 710054, 西安; 2. 西安科技大学智能系统安全与控制研究所, 710054, 西安; 3. 西安交通大学自动化科学与工程学院, 710049, 西安)

摘要: 为研究新型冠状病毒肺炎(简称新冠肺炎)传播机理和传播风险,预测疫情发展趋势,对政府制定相关疫情防控政策提供帮助,提出了一种新的新冠肺炎传播非线性动力学模型(SLEIR)。该模型考虑到疫情中采取保护措施的人群,将其作为低危群体加入到模型中;通过对模型的基本再生数、平衡点、稳定性和分岔等进行分析,揭示新冠肺炎传播机理;利用印度新冠肺炎真实数据对模型参数和部分状态初值进行最小二乘拟合,根据拟合的参数对印度疫情发展趋势做出预测。该模型对印度 3~4 月、4~5 月两阶段疫情预测平均相对误差分别为 4.107% 和 2.805%,对于印度 10 月最新的疫情,预测平均相对误差为 3.266%,预测结果表明 SLEIR 模型具有较好的预测效果。与传统 SEIR 模型相比,该模型能适应印度疫情复杂的变化趋势,且具有更高的预测精度,可以为政府选择合适的防控措施提供技术支撑。

关键词: 新型冠状病毒肺炎;非线性动力学;基本再生数;平衡点;预测

中图分类号: TP399 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202205005 **文章编号:** 0253-987X(2022)05-0043-11



OSID 码

Dynamics Modeling and Analysis of COVID-19

YU Zhenhua^{1,2}, HUANG Shange^{1,2}, YANG Bo³, GAO Hongxia^{1,2}, LU Si^{1,2}

(1. College of Computer Science & Technology, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China;
2. Institute of Systems Security and Control, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China;
3. School of Automation Science and Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: To study the spreading mechanism and risk and predict the spreading trend of COVID-19, and provide supports for the government to formulate prevention and control policies, a new nonlinear dynamic model, i. e., the susceptible-low risk-exposed-infectious-removed (SLEIR) model is proposed, and the population with protection measures is regarded as a low-risk group and included into this model. The basic reproduction number, equilibrium, stability and bifurcation are analyzed to reveal the spreading mechanism, and the data on COVID-19 in India is used for least-squares fitting of model parameters and some initial values. The fitted parameters are used to predict the spreading trend in India. Predicting results show that the average relative errors of the epidemic prediction are 4.107% and 2.805% from March to April and from April to May, respectively. For the latest epidemic prediction of India in October, the average relative error is 3.266%. These simulations indicate that the proposed model can accurately predict COVID-19 spreading in India, is more suitable for analyzing its spreading in India with higher prediction accuracy compared with the traditional SEIR model, and can provide technical support

for the government of India to select prevention and control measures.

Keywords: COVID-19; non-linear dynamics; basic reproduction number; equilibrium; prediction

新型冠状病毒肺炎(coronavirus disease 2019, COVID-19,简称新冠肺炎)在全球肆虐已长达一年半之久,原本已经得到稳定控制的疫情近期又呈现出二次暴发的趋势。截至2021年5月1日,新冠肺炎已经在印度、日本等多个国家二次暴发,新冠病毒的变异使疫情规模加速扩大,给社会经济发展造成巨大影响。近年来,传染病动力学研究进展迅速,大量数学模型被用于分析各种各样的传染病问题,以探索传染病一般传染规律^[1-3]。因此,为了对新冠肺炎的传播规律进行研究,并对新冠肺炎传播趋势进行预测,可通过建立新冠肺炎传播数学模型,研究其传播趋势,分析不同群体的变化规律,探索抑制新冠肺炎传播的有效防控手段,这对于疫情治理具有重要的理论和实际意义。

在现有的传染病模型中,最具代表性的有SIR(susceptible-infected-recovered)、SIRS(susceptible-infected-recovered-susceptible)、SEIR(susceptible-exposed-infected-recovered)等经典的传染病模型^[4-6]。目前,针对新冠肺炎特点,也建立了相应的模型对其进行研究。在经典的SIR模型基础上,Jia等^[7]运用动态扩展的SIR模型对意大利疫情进行分析和预测,估计出疫情持续时间。Cooper等^[8]利用SIR模型对美国德克萨斯州的不同社区进行了研究,得出了采取适当的防控策略可以将社区疫情进行控制的结论。喻孜等^[9]提出了时变参数的SIR模型,针对武汉的新冠肺炎进行了相关分析。Kudryashov等^[10]采用SIR模型对较小疫情群体进行仿真分析,预测结果较好。Alenezi等^[11]将SIR模型应用于科威特新冠肺炎疫情的分析预测,预测出该国的感染峰值。Lymperopoulos^[12]将神经网络与SIR模型结合对新冠肺炎疫情进行评估,其预测效果良好。Lux^[13]从社会动力学角度出发,运用SIR模型对欧洲各国新冠疫情影响进行分析,提出了控制疫情蔓延的方法。SIR模型的局限性在于其适用性受到限制,只能在疫情暴发阶段且有足够数据时可用,而且此模型对群体状态划分考虑不够充分,没有划分潜伏者、无症状感染者等,也没有考虑个人防护、政府管控等因素,对现实情况考虑不够完善。

除了经典的SIR模型,国内外许多学者也提出了其他改进模型。孙皓宸等^[14]将校园新冠肺炎数据与传统SEIR模型结合,验证了数字追踪防控策略

的有效性。王国强等^[15]基于不同年龄层接触模式建立了SEIHR(susceptible-exposed-infected-hospitalized-recovered)新冠肺炎传播模型,对不同年龄段群体新冠肺炎的传播趋势进行了分析,研究发现居家模式对疫情的控制具有良好的有效性。李盈科等^[16]介绍了关于新冠肺炎的潜伏期、代间隔和基本再生数等几个重要流行病学参数的研究进展和相应的估计方法。范如国等^[17]运用SEIR模型对武汉的新冠肺炎拐点进行了预测分析。Carcione等^[18]通过改变SEIR模型中感染期的上下限对意大利的疫情进行分析,并对疫情峰值进行了预测。Ivorra等^[19]以SEIR模型为基础提出了SEIHRD(susceptible-exposed-infected-hospitalized-recovered-dead)模型,研究了不同检测病例比例对中国新冠肺炎疫情规模的影响。Jahanshahi等^[20]通过分阶的SIRD模型对23个国家新冠肺炎时间序列数据进行分析,提出了运用多重分式方法可以更有效地预测新冠肺炎感染总人数的结论。Kuniya^[21]基于SEIR模型利用带泊松噪声的最小二乘方法,估计了日本疫情的基本再生数,并对当下流行病学提出了相关建议。周武略等^[22]把SEIR模型改进为SEAIC(susceptible-exposed-asymptomatic-infected-CT)模型,对武汉疫情初期的防控提出相关建议。Yarsky^[23]设计了一种新的遗传算法,通过该算法可将美国各个州的数据与现有的SEIR模型匹配,取得了较好的拟合效果。López等^[24]通过使用随机修正SEIR模型来探索不同的隔离情景,研究了潜伏期间感染的传播趋势,论证了保持社交距离和个人非药物干预可能消除封锁的必要性。Raslan^[25]提出一种扩展SEIR模型分析和预测埃及新冠肺炎,预测结果与实际报告数据误差较小,并在此基础上讨论了隔离期时长对疫情的影响。杨波等^[26]考虑实际防控措施,提出了一个新的新冠肺炎传播动力学模型,该模型能较准确地模拟新冠肺炎的传播动态,并利用武汉及湖北其他地区数据对该模型进行验证。以上模型均为SEIR模型的拓展,此类模型对群体状态划分考虑更加全面,反映出更多群体状态的变化趋势,但是部分模型过于复杂,难以对其动力学行为进行分析和验证,无法在动力学的基础上更好地了解疫情的动态传播过程。此外,以上大多数模型对参数采取了固定的取值策略,没有考虑到参数的动态变化,

因此对疫情整体发展状况的预测不够准确。

通过对新冠肺炎传播的规律和特点研究,本文将疫情中的人群划分为易感者 S (susceptible)、低危群体 L (low-risk)、潜伏者 E (exposed)、感染者 I (infected)和治愈者 R (recovered),建立了新的 SLEIR 模型,并对模型的平衡点、稳定性及分岔进行了分析,揭示新冠肺炎的传播机理。疫情发展过程是一个动态过程,其发展趋势会受各种因素影响,进而导致模型参数发生变化,本文在实际数据的基础上使用最小二乘参数估计方法,对模型参数进行分段估计,从而提高疫情预测精度。最后利用该模型对印度疫情的传播趋势进行模拟仿真、预测与分析,取得了较好的效果,说明 SLEIR 模型可以对新冠肺炎的传播趋势起到一定的预警和预测作用。

1 SLEIR 模型假设和建立

1.1 模型假设

考虑到新冠肺炎疫情的特点,本文建立了一个新的 SLEIR 模型。此模型将人群分为易感染者 (S)、低危群体 (L)、潜伏者 (E)、感染者 (I)、治愈者 (R)共 5 个群体。其中,易感染者 (S)指不采取任何保护措施且未染病的群体,该群体在与感染者密切接触时,会有一定概率被病毒感染;低危群体 (L)指采取保护措施且未染病的群体(例如佩戴口罩),该群体在与感染者密切接触时,感染病毒的概率较易感者大大降低;潜伏者 (E)指被病毒感染但仍处于染病潜伏期的群体;感染者 (I)指已经被病毒感染且疾病暴发的群体;治愈者 (R)指感染病毒后被治愈的群体。现对新模型提出以下假设。

(1)在模型中, $S(t)$ 、 $L(t)$ 、 $E(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 分别表示 t 时刻 S 、 L 、 I 、 E 、 R 状态群体占总人口的比例,假设模型总人口始终保持为一个常数,对任意时刻 t 均有 $S(t)+E(t)+L(t)+I(t)+R(t)=1$ 。

(2)易感染者和低危群体均可能被病毒感染。

(3)考虑人口的出生、死亡、流动等种群动力因素,在动力系统中模拟出人口的流动,即易感群体和低危群体的补充及各群体的人口流出^[27],假设模型人口进入率为 μ_1 ,人口退出率为 μ_2 。为简化计算,假设模型总人口恒定,那么人口进入率和退出率相同,人口进入和退出率 $\mu=\mu_1=\mu_2$ 。

(4)一个病人(潜伏者或感染者)一旦与易感染者和低危群体发生接触行为则可能会造成传染。假设单位时间 t 内,一个病人感染易感染者和低危群体的数量与接触到的该群体数量成正比,感染率分

别为 α 和 β ,故在单位时间 t 内易感染者和低危群体被感染数分别为 $\alpha S(t)(E(t)+I(t))$ 和 $\beta L(t)(E(t)+I(t))$ 。

(5)根据新型冠状病毒的特点,易感染者被感染后存在潜伏周期,假设在本模型中,感染者只能通过潜伏者转化。假设单位时间 t 内,潜伏者转化为感染者的数量与此环境内潜伏者 $E(t)$ 成正比,潜伏暴发率为 σ ,从而在单位时间 t 内感染者的增量为 $\sigma E(t)$ 。

(6)受医疗卫生水平影响,假设单位时间 t 内,感染者被治愈的数量与感染者 $I(t)$ 成正比,治愈率为 γ ,从而单位时间内治愈者的增量为 $\gamma I(t)$ 。为进一步简化模型,暂且不考虑治愈者复阳情况。

基于上述假设,SLEIR 模型的状态转移如图 1 所示。

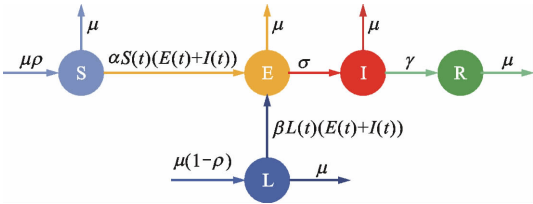


图 1 SLEIR 模型的状态转移图
Fig. 1 State transition diagram of SLEIR model

1.2 模型的建立

根据上面的状态转移过程,利用非线性动力学理论对其进行动力学建模,构建出新冠肺炎传播 SLEIR 模型,表达式如下

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu\rho - \alpha S(t)(E(t)+I(t)) - \mu S(t) \\ \frac{dL(t)}{dt} = \mu(1-\rho) - \beta L(t)(E(t)+I(t)) - \mu L(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \alpha S(t)(E(t)+I(t)) + \beta L(t)(E(t)+I(t)) - \sigma E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: ρ 为易感染者占新加入人口的比例; α 和 β 分别为易感群体 S 和低危群体 L 的感染率。

对于模型(1),由假设可知 $S(t)+L(t)+E(t)+I(t)+R(t)=1$,且前 4 个方程均不包含 $R(t)$,故实际上只需讨论前 4 个方程,将 $R(t)=1-(S(t)+L(t)+E(t)+I(t))$ 代入模型(1),可约简为如下微分动力系统

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu\rho - \alpha S(t)(E(t) + I(t)) - \mu S(t) \\ \frac{dL(t)}{dt} = \mu(1-\rho) - \beta L(t)(E(t) + I(t)) - \mu L(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \alpha S(t)(E(t) + I(t)) + \beta L(t)(E(t) + I(t)) - \sigma E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) \end{cases} \quad (2)$$

由现实情况可知, S、L、E、I、R 这 5 个群体皆为正数, 系统(2)满足初始条件 $S(t) \geq 0, E(t) \geq 0, L(t) \geq 0, I(t) \geq 0$, 其状态空间 $\Omega = \{(S(t), E(t), L(t), I(t)) : S(t) \geq 0, E(t) \geq 0, L(t) \geq 0, I(t) \geq 0\}$ 。由于 Ω 为正不变集, 因此只需考虑初始条件处于 Ω 内的解, 其在 Ω 内具有存在性及唯一性。

令系统(2)的微分方程右端为 0, 通过计算得出系统(2)中的无病平衡点 E_0 和地方病平衡点 E_{e1}^* 、 E_{e2}^* 如下式所示

$$E_0 = (\rho, 1-\rho, 0, 0) \quad (3)$$

$$E_{e1}^* = (S_1^*, L_1^*, E_1^*, I_1^*) \quad (4)$$

$$E_{e2}^* = (S_2^*, L_2^*, E_2^*, I_2^*) \quad (5)$$

其中

$$S_1^* = \frac{(\beta-\alpha)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) + \alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma) + M}{2\alpha(\beta-\alpha)(\gamma + \mu + \sigma)} \quad (6)$$

$$L_1^* = \frac{(\alpha-\beta)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) + \alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma) + M}{2\beta(\alpha-\beta)(\gamma + \mu + \sigma)} \quad (7)$$

$$E_1^* = \frac{\mu(\alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma) - (\alpha + \beta)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) - M)}{2\alpha\beta(\mu + \sigma)(\gamma + \mu + \sigma)} \quad (8)$$

$$I_1^* = \frac{\mu\sigma(\alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma) - (\alpha + \beta)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) - M)}{2\alpha\beta(\gamma + \mu)(\mu + \sigma)(\gamma + \mu + \sigma)} \quad (9)$$

$$S_2^* = \frac{(\beta-\alpha)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) + \alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma) - M}{2\alpha(\beta-\alpha)(\gamma + \mu + \sigma)} \quad (10)$$

$$L_2^* = \frac{(\alpha-\beta)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) + \alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma) - M}{2\beta(\alpha-\beta)(\gamma + \mu + \sigma)} \quad (11)$$

$$E_2^* = \frac{\mu(\alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma) - (\alpha + \beta)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) + M)}{2\alpha\beta(\mu + \sigma)(\gamma + \mu + \sigma)} \quad (12)$$

$$I_2^* =$$

$$\frac{\mu\sigma(\alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma) - (\alpha + \beta)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) + M)}{2\alpha\beta(\gamma + \mu)(\mu + \sigma)(\gamma + \mu + \sigma)} \quad (13)$$

$$M = ((\beta-\alpha)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma) + \alpha\beta(\gamma + \mu + \sigma))^2 - 4\alpha\beta\rho(\beta-\alpha)(\gamma + \mu + \sigma)(\mu^2 + \gamma\mu + \sigma\mu + \gamma\sigma)^{1/2} \quad (14)$$

根据系统(2)和再生矩阵法^[5], 有

$$\begin{cases} F_E = \alpha S(t)(E(t) + I(t)) + \beta L(t)(E(t) + I(t)) \\ F_I = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} V_E = (\sigma + \mu)E(t) \\ V_I = -\sigma E(t) + (\mu + \gamma)I(t) \end{cases} \quad (16)$$

将平衡点 E_0 的取值代入 F 和 V 矩阵, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{FV}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_E}{\partial E} & \frac{\partial F_E}{\partial I} \\ \frac{\partial F_I}{\partial E} & \frac{\partial F_I}{\partial I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V_E}{\partial E} & \frac{\partial V_E}{\partial I} \\ \frac{\partial V_I}{\partial E} & \frac{\partial V_I}{\partial I} \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha S + \beta L & \alpha S + \beta L \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma + \mu & 0 \\ -\sigma & \mu + \gamma \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha\rho + \beta(1-\rho) & \alpha\rho + \beta(1-\rho) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma + \mu} & 0 \\ \frac{\sigma}{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma)} & \frac{1}{\mu + \gamma} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(\sigma + \mu + \gamma)(\alpha\rho + \beta(1-\rho))}{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma)} & \frac{\alpha\rho + \beta(1-\rho)}{\mu + \gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

通过计算, 矩阵(17)的谱半径为

$$\rho_0(\mathbf{FV}^{-1}) = \frac{(\sigma + \mu + \gamma)(\alpha\rho + \beta(1-\rho))}{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma)} \quad (18)$$

故系统(2)的基本再生数 R_0 为

$$R_0 = \frac{(\sigma + \mu + \gamma)(\alpha\rho + \beta(1-\rho))}{(\sigma + \mu)(\mu + \gamma)} \quad (19)$$

基本再生数 R_0 是一个非常重要的概念, 它表示在发病初期, 当所有人均为易感者时, 一个感染者在其平均感染周期内所能感染的人数。 $R_0 = 1$ 是区分疾病流行与否的阈值。

2 SLEIR 模型动力学行为分析

2.1 平衡点及其稳定性分析

定理 1 当且仅当 $R_0 < 1$ 时, 系统(2)在无病平衡点 E_0 渐进稳定。

证明 系统(2)在无病平衡点 E_0 处的雅可比(Jacobi)矩阵为

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\alpha\rho & -\alpha\rho \\ 0 & -\mu & -\beta(1-\rho) & -\beta(1-\rho) \\ 0 & 0 & \alpha\rho+\beta(1-\rho)-\sigma-\mu & \alpha\rho+\beta(1-\rho) \\ 0 & 0 & \sigma & -\gamma-\mu \end{pmatrix}$$

(20)

通过计算可知 J_{E_0} 的特征根为

$$\lambda_{1,2} = -\mu$$

(21)

$$\lambda_3 = \frac{\alpha\rho + \beta(1-\rho) - (\mu + \gamma) - Q}{2}$$

(22)

$$\lambda_4 = \frac{\alpha\rho + \beta(1-\rho) - (\mu + \gamma) + Q}{2}$$

(23)

其中

$$Q = (\rho^2(\beta-\alpha)^2 + 2(\gamma+\mu+2\sigma)(\alpha\rho + \beta(1-\rho)) + \beta(2\alpha\rho + \beta(1-2\rho)))^{1/2}$$

(24)

通过计算易得 $\lambda_{1,2} < 0$, 当 $R_0 = \frac{(\sigma+\mu+\gamma)(\alpha\rho+\beta(1-\rho))}{(\sigma+\mu)(\mu+\gamma)} < 1$, 特征值 $\lambda_3, \lambda_4 < 0$, 此

时 J_{E_0} 的所有特征根的值均小于 0, 由 Lyapunov 定理可知, 系统(2)在无病平衡点 E_0 处渐进稳定。

例 1 令 $\alpha = 0.2, \beta = 0.1, \sigma = 0.15, \rho = 0.4, \gamma = 0.15, \mu = 0.15$, 则 $R_0 = 0.7 < 1$ 。根据定理 1, 系统(2)的无病平衡点渐进稳定。当政府通过采取一系列措施对疫情进行管控, 降低感染率 α ; 或者通过加大医疗行业投入使治愈率 γ 提高, 使 $R_0 < 1$ 时, 疫情将会在短期内结束。通过仿真, 此时系统(2)不同状态群体的演化曲线如图 2 所示。图 3 为当 I 状态群体比例分别为 0.10、0.15、0.20、0.25、0.30、0.35、0.40, $R_0 < 1$ 时, 仿真后叠加形成的 S-L-I 平面相轨图。

$$J_{E_e^*} = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha(E^* + I^*) & 0 & -\alpha S^* & -\alpha S^* \\ 0 & -\mu - \beta(E^* + I^*) & -\beta L^* & -\beta L^* \\ \alpha(E^* + I^*) & \beta(E^* + I^*) & \alpha S^* + \beta L^* - \sigma - \mu & \alpha S^* + \beta L^* \\ 0 & 0 & \sigma & -\gamma - \mu \end{pmatrix}$$

(25)

式中: $S^* = S_1^*; L^* = L_1^*; E^* = E_1^*; E^* = E_1^*$ 。

式(25)的特征方程为

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

(26)

其中

$$\begin{cases} a_4 = 1 \\ a_3 = 3\mu + \gamma + \sigma + (\alpha + \beta)(E^* + I^*) - \alpha S^* - \beta L^* \\ a_2 = 6\mu^2 + 3\mu(\gamma + \sigma) + \gamma\sigma + (\gamma + \sigma + 3\mu)((\alpha + \beta)(E^* + I^*) - \alpha S^* - \beta L^*) + \alpha\beta(E^* + I^*)((E^* + I^*) - (S^* + L^*)) \\ a_1 = 3\mu^3 + 3\mu^2(\gamma + \sigma) + 3\mu\gamma\sigma + \mu^2(\gamma + \mu + \sigma)((\alpha + \beta)(E^* + I^*) - \alpha S^* - \beta L^*) + \alpha\beta\mu(\gamma + \mu + \sigma)(E^* + I^*)((E^* + I^*) - (S^* + L^*)) + \alpha\beta\gamma\sigma(E^* + I^*)^2 + \gamma\mu\sigma(\alpha + \beta)(E^* + I^*) \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

(27a)

定理 2 当 $R_0 > 1$ 时, 系统(2)在地方病平衡点 E_e^* 处局部渐进稳定。

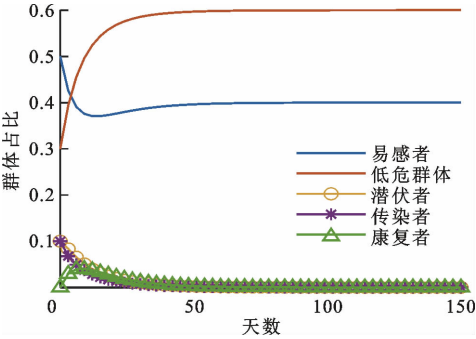


图 2 例 1 中不同状态群体演化过程

Fig. 2 Evolution process of population in different states of example 1

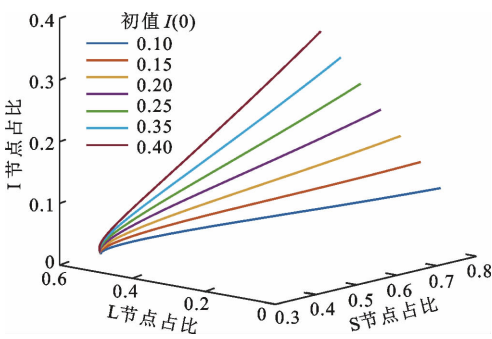


图 3 $R_0 < 1$ 时不同初值的 S-L-I 平面相轨图

Fig. 3 S-L-I plane phase orbital diagram with different initial values when $R_0 < 1$

证明 由于系统(2)地方病平衡点 E_{e1}^* 与 E_{e2}^* 在性质和数值上相似, 故本文将以地方病平衡点 E_{e1}^* 作为分析的重点。

令 $E_e^* = E_{e1}^*$, 系统(2)在地方病平衡点 E_e^* 处的雅可比矩阵为

$$\begin{cases} a_1 = 3\mu^2(\gamma + \sigma) + 4\mu^3 + 2\mu\gamma + (3\mu^2 + 2\mu\gamma + 2\mu\sigma)((\alpha + \beta)(E^* + I^*) - \alpha S^* - \beta L^*) + \alpha\beta(\gamma + 2\mu - \sigma)(E^* + I^*)((E^* + I^*) - (S^* + L^*)) \\ a_0 = \mu^4 + \mu^3(\gamma + \sigma) + \mu^2\gamma\sigma + \mu^2(\gamma + \mu + \sigma)((\alpha + \beta)(E^* + I^*) - \alpha S^* - \beta L^*) + \alpha\beta\mu(\gamma + \mu + \sigma)(E^* + I^*)((E^* + I^*) - (S^* + L^*)) + \alpha\beta\gamma\sigma(E^* + I^*)^2 + \gamma\mu\sigma(\alpha + \beta)(E^* + I^*) \end{cases}$$

(27b)

根据 Routh-Hurwitz 判定准则, 可得

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = a_4 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad (28)$$

由理论可知,方程中所有未知量均为大于0的自然数,通过计算易求得 $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$,且 $\Delta_2 = a_2 a_3 - a_1 a_4 > 0$, $\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0$, $\Delta_4 = a_0 \Delta_3 > 0$ 恒成立,由Hurwitz准则可知,系统(2)在地方病平衡点 E_c^* 处渐近稳定。

例2 令 $\alpha = 0.4, \beta = 0.2, \sigma = 0.15, \rho = 0.4, \gamma = 0.15, \mu = 0.15$,则 $R_0 = 1.4 > 1$ 。根据定理2,系统(2)的地方病平衡点渐进稳定。当政府对于新冠肺炎缺乏管控经验时,感染率 α 处于较高水平;或者由于对医疗行业投入较少,使治愈率 γ 处于低值,导致 $R_0 > 1$,疫情将迅速暴发并持续发展,如印度疫情二次暴发前期,若对疫情不加控制,最终将会达到一个平衡状态,会有恒定比例的感染者存在。通过仿真,此时系统(2)的各状态群体演化曲线如图4所示。图5为当I状态群体比例分别为0.10、0.15、0.20、0.25、0.30、0.35、0.40, $R_0 > 1$ 时,仿真后叠加形成的S-L-I平面相轨图。

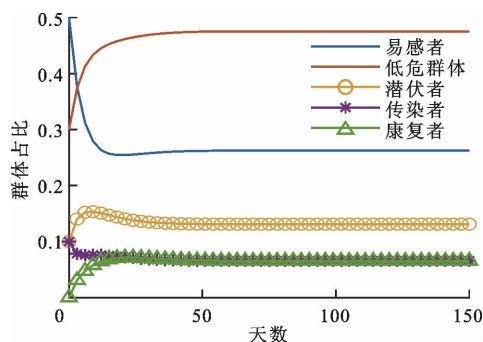


图4 例2中不同状态群体演化过程

Fig. 4 Evolution process of population in different states of example 2

2.2 分岔分析

定理3 当 $R_0 = 1$ 时,系统(2)在无病平衡点 E_0 处发生跨临界分岔。

证明 当 $R_0 = 1$ 时,系统(2)在无病平衡点 E_0 处雅可比矩阵的特征方程为

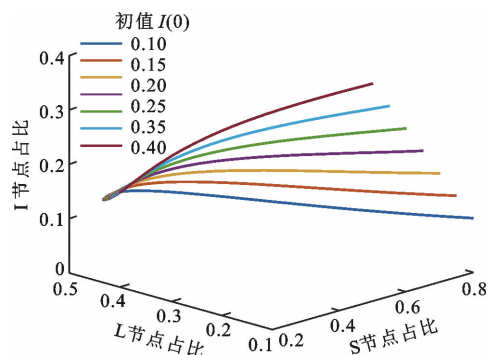


图5 $R_0 > 1$ 时不同初值的S-L-I平面相轨图

Fig. 5 S-L-I plane phase orbital diagram with different initial values when $R_0 > 1$

$$\lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda = 0 \quad (29)$$

显然此特征方程的一个特征根为0,故 E_0 为非双曲平衡点。

当 $R_0 > 1$ 时, E_0 为不稳定焦点, E_c^* 为稳定结点。当 $R_0 < 1$ 时, E_0 变为稳定结点, E_c^* 变为不稳定焦点,平衡点发生稳定性突变,命题得证。

基本再生数 R_0 是影响新冠肺炎持续传播的一个重要因素。若政府对疫情不够重视,对疫情防控缺乏经验,会使感染率 α 升高,则 $R_0 > 1$,疫情将会一直持续下去;若政府对疫情的管控采取积极主动积极的措施,使感染率 α 降低,则有 $R_0 < 1$,疫情将最终消亡。

R_0 的取值与处于平衡点时感染者群体I和潜伏者E的占比关系如图6所示。从图6中可以看出,在 $R_0 = 1$ 邻域内,系统(2)发生跨临界分岔。

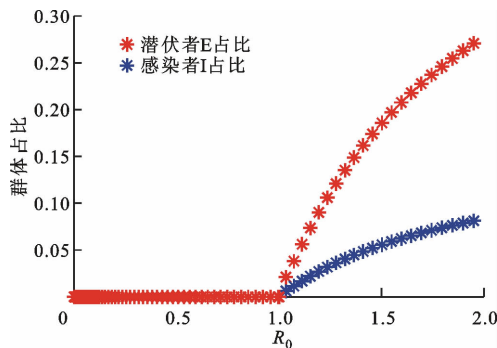


图6 不同初值下 R_0 与感染者I和潜伏者E占比的关系

Fig. 6 Diagram of proportion of R_0 to Infected and Exposed at different initial values

3 基于SLEIR模型的疫情预测与分析

3.1 参数估计

为了揭示新冠肺炎传播规律,预测疫情发展趋势。通过考虑疫情传播实际情况,以真实数据为依

据,对 SLEIR 模型中的参数进行估计。

SLEIR 模型中存在 $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma, \mu$ 共 6 个未知参数。在人口进入率和人口退出率 μ 方面,根据 TradingEconomics 对印度 2018 年的人口调查显示^[28],印度全年人口增长率为 1.04%,将其作为人口进入率和人口退出率的取值参考,故 μ 取值为 $\mu = \sqrt[365]{1.0104} - 1 \approx 0.000\ 028\ 35$,即人口进入和退出率 $\mu \approx 0.000\ 028\ 35$ 。

通过对霍普金斯大学所统计的 2021 年 3 月 1 日至 2021 年 5 月 30 日印度全国新冠肺炎数据,将其分为两个阶段,分别采用最小二乘法对模型进行参数估计,其第 1 阶段与第 2 阶段参数估计结果如表 1 和表 2 所示。

表 1 模型第 1 阶段参数定义和估计值
Table 1 The definition and value of parameters in the first stage

参数	定义	估计值	来源
α	易感感染率	0.412 851 52	参数估计
β	低危感染率	0.010 281 81	参数估计
γ	治愈率	0.493 981 75	参数估计
σ	潜伏暴发率	0.235 678 12	参数估计
ρ	低危群体比例	0.418 320 22	参数估计
μ	人口进入和退出率	0.000 028 35	文献[28]

表 2 模型第 2 阶段参数定义和估计值
Table 2 The definition and value of parameters in the second stage

参数	定义	估计值	来源
α	易感感染率	0.987 748 68	参数估计
β	低危感染率	0.039 320 86	参数估计
γ	治愈率	0.929 815 10	参数估计
σ	潜伏暴发率	0.887 039 04	参数估计
ρ	低危群体比例	0.223 056 57	参数估计
μ	人口进入和退出率	0.000 028 35	文献[28]

在误差分析方面,本文采用平均相对误差(MRE)对模型进行评价。令 X 为实际值, $\hat{X}$ 为估计值。

平均相对误差定义如下式

$$E_{MR} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\hat{X}_i - X_i}{X_i} \right|, i = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

3.2 疫情预测

3.2.1 印度 2021 年 3~4 月疫情预测分析

通过对印度 2021 年 3 月疫情数据的拟合,将拟合出的参数估计代入系统(2),并将所得到的预测曲

线与印度 2021 年 4 月的真实数据进行比较,预测相对误差为 4.107%,预测曲线如图 7 所示。

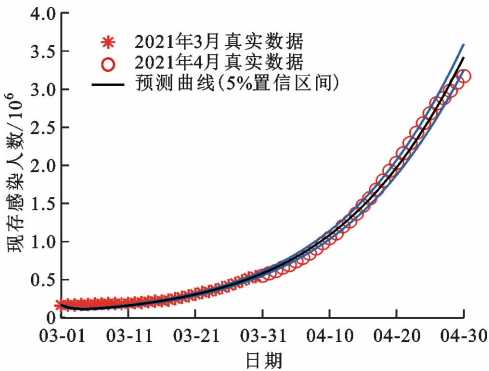


图 7 2021 年 3~4 月疫情数据仿真及预测结果
Fig. 7 Simulation and prediction of epidemic data in March-April 2021

通过对印度 3 月份的参数进行估计后,根据所估计的数值计算出其基本再生数 $R_0 = 0.9581 < 1$,可见印度疫情并不会一直延续下去,但是由于基本再生数接近于 1,其疫情控制速度将极其缓慢。

3.2.2 印度 2021 年 4~5 月疫情预测分析

通过对霍普金斯大学所统计的印度全国 2021 年 4 月 1 日至 2021 年 5 月 30 日新冠肺炎数据,采用最小二乘法对模型进行参数估计如表 2 所示。

通过对印度 2021 年 4 月数据进行拟合,将拟合出的参数估计代入系统(2),将生成的预测曲线与 5 月份疫情真实数据进行比较,预测相对误差为 2.805%,预测曲线如图 8 所示。

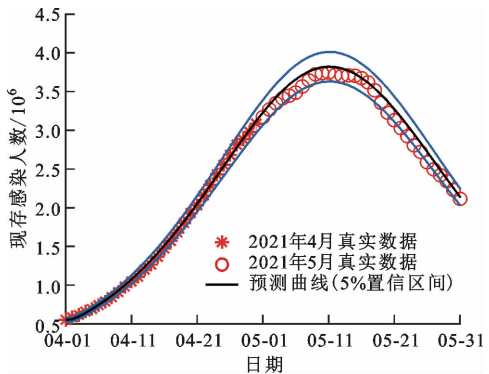


图 8 2021 年 4~5 月疫情数据仿真及预测结果
Fig. 8 Simulation and prediction of epidemic data in April-May 2021

通过对表 2 中的参数估计进行观察后,发现其中易感感染率 $\alpha \approx 0.9877$,接近于 1,但是基本再生数 $R_0 = 0.58319$,处于一个低的估计值。因此,正如当下传染病领域的相关专家对印度数据的质

疑^[29-30],本文通过对印度真实疫情数据拟合后得出的参数估计进行分析,同样也认为印度疫情的真实情况可能比官方数据公布的更加严重,其官方公布的疫情数据存在一定的异常情况,在 3.3 节 SEIR 模型的比较中也体现出了这种数据的异常。

3.2.3 印度 9~10 月及未来疫情预测分析

对印度 3~5 月份新冠肺炎疫情的预测充分说明了 SLEIR 模型的有效性。为了对印度长期疫情做出预测,首先将 9 月份疫情数据代入模型中进行参数估计,参数估计结果如表 3 所示,预测相对误差为 3.266%,预测曲线如图 9 所示。

表 3 SLEIR 模型 10 月参数定义和估计值
Table 3 The definition and value of parameters of the model in October

参数	定义	估计值	来源
α	易感感染率	0.206 843 80	参数估计
β	低危感染率	0.068 975 60	参数估计
γ	治愈率	0.280 495 32	参数估计
σ	潜伏暴发率	0.322 427 62	参数估计
ρ	低危群体比例	0.315 563 26	参数估计
μ	人口进入和退出率	0.000 028 35	文献[28]

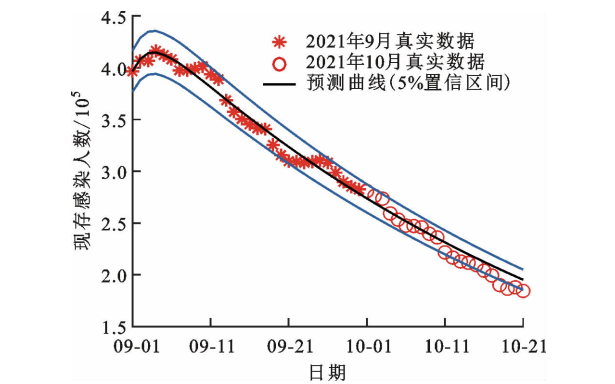


图 9 2021 年 9~10 月疫情数据仿真及预测
Fig. 9 Simulation and prediction of epidemic data in September-October 2021

通过图 9 可以看出,SLEIR 模型对于印度当前疫情具有较好的预测效果。假设在政府管控措施不变的情况下,通过 SLEIR 模型对印度之后的疫情发展做出预测,结果如图 10 所示。从图 10 结果可以看出,若病毒感染率不发生变化,印度的现存感染人数预计将在 2021 年 12 月份降至 10 万人以下,整个疫情预计将在 2022 年 6 月底结束。

3.3 不同模型仿真比较

本节通过 SLEIR 模型与传统 SEIR 模型的对

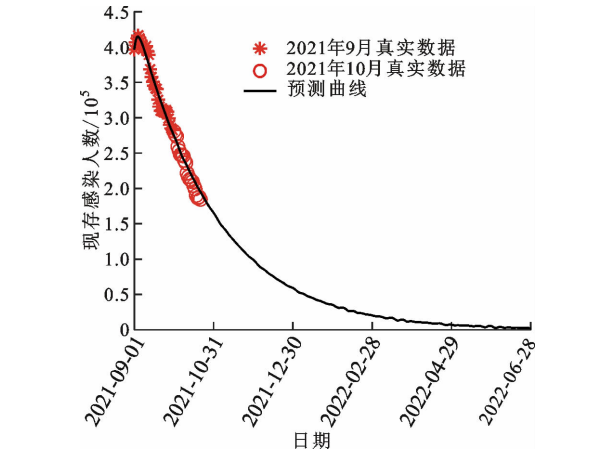


图 10 2021 年 10 月之后的印度疫情预测
Fig. 10 Simulation and prediction of epidemic data after October 2021

比,比较两个模型对于疫情预测的差异。

对于 SEIR 模型^[30],有如下微分动力系统

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu - \alpha S(t)(E(t) + I(t)) - \mu S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \alpha S(t)(E(t) + I(t)) - \sigma E(t) - \mu E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (31)$$

基于 2021 年 3 月印度新冠肺炎数据对 SEIR 模型重新使用最小二乘参数估计,其参数估计值如表 4 所示(SLEIR 参数估计值为表 1 估计值),预测相对误差为 15.796%(SLEIR 模型为 4.107%),预测曲线如图 11 所示。

表 4 SEIR 模型第 1 阶段参数定义和估计值
Table 4 Parameters definition and value of SEIR model in the first stage

参数	定义	估计值	来源
α	易感感染率	0.285 163 22	参数估计
γ	治愈率	0.619 485 33	参数估计
σ	潜伏暴发率	0.405 435 16	参数估计
μ	人口进入和退出率	0.000 028 35	文献[28]

由图 11 和表 4 可以看出,根据 SEIR 模型进行疫情预测后,SLEIR 模型的预测误差优于 SEIR 模型。因此,采取 SLEIR 模型对疫情的预测更符合实际。从仿真中也可以看出,根据实际数据对模型参数进行估计,对于提高模型预测精度是有必要的。

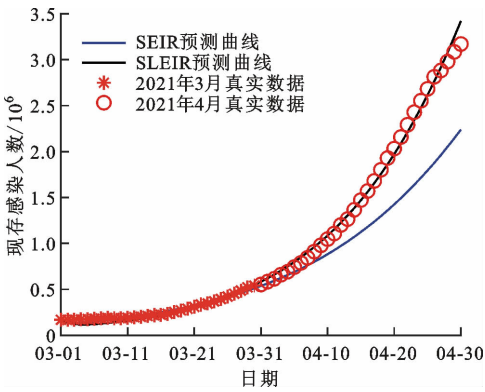


图 11 SEIR 模型与 SLEIR 模型第 1 阶段预测曲线对比
Fig. 11 The prediction curves of SEIR model and SLEIR model in the first stage

按照上述方法对 SEIR 模型进行第 2 阶段的拟合预测,其相关参数估计值如表 5 所示,预测相对误差为 204.175%,预测曲线如图 12 所示。

表 5 SEIR 模型第 2 阶段参数定义和估计值
Table 5 Parameters definition and value of SEIR model in the second stage

参数	定义	估计值	来源
α	易感感染率	0.055 332 67	参数估计
γ	治愈率	0.000 323 14	参数估计
σ	潜伏暴发率	0.082 609 03	参数估计
μ	人口进入和退出率	0.000 028 35	文献[28]

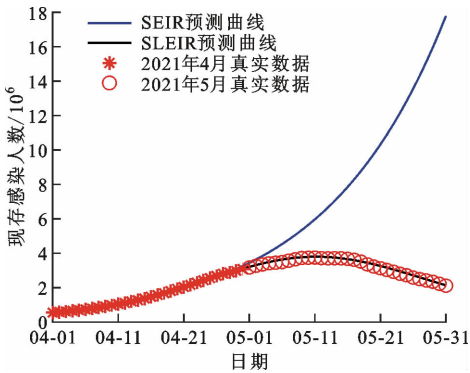


图 12 SEIR 模型与 SLEIR 模型第 2 阶段预测曲线对比
Fig. 12 The prediction curves of SEIR model and SLEIR model in the second stage

由表 5 可以看出,SEIR 模型在第 2 阶段相对误差超过 100%,已经无法达到预测效果,通过图 12 对 SEIR 模型的拟合预测曲线进行观察,SEIR 模型预测效果差,无法反映出真实情况。此外,对表 9 中 SEIR 的参数估计值进行观察,其中易感感染率 $\alpha \approx 0.055\ 3$,治愈率 $\gamma \approx 0.000\ 3$,显然这种参数的估计值出现异常。

将 SLEIR 模型与 SEIR 模型进行比较,可以发现 SLEIR 模型对于第 1、第 2 阶段的拟合预测均有良好的拟合结果,相较于 SEIR 模型可以适应更复杂的疫情状况。此外,通过对 SLEIR 和 SEIR 模型第 2 阶段参数估计值的异常情况进行观察,对印度 2 次疫情暴发中现存感染人数迅速转折下降的情况存有质疑,其数据不符合传染病发展规律,正如现在国内外专家对印度疫情状态的讨论和质疑^[29-30]。

4 结 论

为了研究新冠肺炎传播的规律和机理,建立了一种新的新冠肺炎传播 SLEIR 模型,并从动力学角度对模型的平衡点、稳定性及分岔等性质进行分析,揭示了新冠肺炎的传播机制。采用最小二乘法对模型参数进行分段估计,模型预测精度更高,在对印度真实情况的拟合方面,该模型对印度疫情的两个阶段拟合度较高。将该模型用于印度新冠肺炎传播趋势预测中,其预测结果与真实数据也比较吻合,通过 SLEIR 模型对印度疫情最新的数据进行预测,取得了较好的效果,并对印度疫情的未来发展做出估计。最后,将 SLEIR 模型与传统动力学模型进行比较,新的 SLEIR 模型在多个阶段的预测误差均优于传统 SEIR 模型,进一步验证了模型的有效性以及对复杂真实情况的适应性,表明该模型能够对政府控制疫情发展做出一定程度上的参考。

参考文献:

[1] PINTO C M A, CARVALHO A R M. A latency fractional order model for HIV dynamics [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2017, 312: 240-256.

[2] CANDIDO D S, CLARO I M, DE JESUS J G, et al. Evolution and epidemic spread of SARS-CoV-2 in Brazil [J]. Science, 2020, 369(6508): 1255-1260.

[3] ROOSA K, LEE Y, LUO Ruiyan, et al. Short-term forecasts of the COVID-19 epidemic in Guangdong and Zhejiang, China; February 13-23, 2020 [J]. Journal of Clinical Medicine, 2020, 9(2): 596.

[4] ARAZI R, FEIGEL A. Discontinuous transitions of social distancing in the SIR model [J]. Physica: A Statistical Mechanics and Its Applications, 2021, 566: 125632.

[5] KIOUACH D, SABBAR Y. Global dynamics analysis of a stochastic SIRS epidemic model with vertical transmission and different periods of immunity [J]. International Journal of Dynamical Systems and Differ-

- ential Equations, 2020, 10(5): 468-491.
- [6] ALRABAIH H, ARFAN M, SHAH K, et al. A comparative study of spreading of novel corona virus disease by using fractional order modified SEIR model [J]. Alexandria Engineering Journal, 2021, 60(1): 573-585.
- [7] JIA Wangping, HAN Ke, SONG Yang, et al. Extended SIR prediction of the epidemics trend of COVID-19 in Italy and compared with Hunan, China [J]. Frontiers in Medicine, 2020, 7: 169.
- [8] COOPER L, MONDAL A, ANTONOPOULOS C G. A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 139: 110057.
- [9] 喻孜, 张贵清, 刘庆珍, 等. 基于时变参数-SIR模型的COVID-19疫情评估和预测 [J]. 电子科技大学学报, 2020, 49(3): 357-361.
- YU Zi, ZHANG Guiqing, LIU Qingzhen, et al. The outbreak assessment and prediction of COVID-19 based on time-varying SIR model [J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2020, 49(3): 357-361.
- [10] KUDRYASHOV N A, CHMYKHOV M A, VIGDOROWITSCH M. Analytical features of the SIR model and their applications to COVID-19 [J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 90: 466-473.
- [11] ALENEZI M N, AL-ANZI F S, ALABDULRAZZAQ H. Building a sensible SIR estimation model for COVID-19 outspread in Kuwait [J]. Alexandria Engineering Journal, 2021, 60(3): 3161-3175.
- [12] LYMPEROPOULOS I N. #stayhome to contain Covid-19; Neuro-SIR; Neurodynamical epidemic modeling of infection patterns in social networks [J]. Expert Systems with Applications, 2021, 165: 113970.
- [13] LUX T. The social dynamics of COVID-19 [J]. Physica: A Statistical Mechanics and Its Applications, 2021, 567: 125710.
- [14] 孙皓宸, 刘肖凡, 许小可, 等. 基于连续感染模型的新冠肺炎校园传播与防控策略分析 [J]. 物理学报, 2020, 69(24): 68-77.
- SUN Haochen, LIU Xiaofan, XU Xiaoke, et al. Analysis of COVID-19 spreading and prevention strategy in schools based on continuous infection model [J]. Acta Physica Sinica, 2020, 69(24): 68-77.
- [15] 王国强, 张烁, 杨俊元, 等. 耦合不同年龄层接触模式的新冠肺炎传播模型 [J]. 物理学报, 2021, 70(1): 204-214.
- WANG Guoqiang, ZHANG Shuo, YANG Junyuan, et al. Study of coupling the age-structured contact patterns to the COVID-19 pandemic transmission [J]. Acta Physica Sinica, 2021, 70(1): 204-214.
- [16] 李盈科, 赵时, 楼一均, 等. 新型冠状病毒肺炎的流行病学参数与模型 [J]. 物理学报, 2020, 69(9): 15-24.
- LI Yingke, ZHAO Shi, LOU Yijun, et al. Epidemiological parameters and models of coronavirus disease 2019 [J]. Acta Physica Sinica, 2020, 69(9): 15-24.
- [17] 范如国, 王奕博, 罗明, 等. 基于SEIR的新冠肺炎传播模型及拐点预测分析 [J]. 电子科技大学学报, 2020, 49(3): 369-374.
- FAN Ruguo, WANG Yibo, LUO Ming, et al. SEIR-based COVID-19 transmission model and inflection point prediction analysis [J]. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2020, 49(3): 369-374.
- [18] CARCIONE J M, SANTOS J E, BAGAINI C, et al. A simulation of a COVID-19 epidemic based on a deterministic SEIR model [J]. Frontiers in Public Health, 2020, 8: 230.
- [19] IVORRA B, FERRÁNDEZ M R, VELA-PÉREZ M, et al. Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) taking into account the undetected infections: the case of China [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 88: 105303.
- [20] JAHANSHAH H, MUNOZ-PACHECO J M, BEKIRO S, et al. A fractional-order SIRD model with time-dependent memory indexes for encompassing the multi-fractional characteristics of the COVID-19 [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 143: 110632.
- [21] KUNIYA T. Prediction of the epidemic peak of coronavirus disease in Japan, 2020 [J]. Journal of Clinical Medicine, 2020, 9(3): 789.
- [22] 周武略, 白迪, 赵继军. 武汉市发生的新冠病毒肺炎建模研究分析 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2020, 17(4): 58-65.
- ZHOU Wulue, BAI Di, ZHAO Jijun. Modeling and Analysis of COVID-19 in Wuhan [J]. Complex Systems and Complexity Science, 2020, 17(4): 58-65.
- [23] YARSKY P. Using a genetic algorithm to fit parameters of a COVID-19 SEIR model for US states [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2021, 185: 687-695.
- [24] LÓPEZ L, RODÓ X. The end of social confinement and COVID-19 re-emergence risk [J]. Nature Human Behaviour, 2020, 4(7): 746-755.

[25] RASLAN W E. Fractional mathematical modeling for epidemic prediction of COVID-19 in Egypt [J]. Ain Shams Engineering Journal, 2021, 12(3): 3057-3062.

[26] 杨波, 于振华, 蔡远利. 新型冠状病毒肺炎传播与控制数学建模研究[J]. 西安交通大学学报, 2021, 55(11): 162-172.
YANG Bo, YU Zhenhua, CAI Yuanli. Mathematical modeling for spread and control of COVID-19 [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2021, 55(11): 162-172.

[27] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004: 116-126.

[28] 观研报告网. 2010-2018 年印度人口总数和年度增长率数据统计表[EB/OL]. (2020-04-09)[2021-08-27].
[http:// data.chinabaogao.com/hgshj/2020/0494X0052020.html](http://data.chinabaogao.com/hgshj/2020/0494X0052020.html).

[29] Center for Global Development. Bloomberg: COVID may have claimed as many as 5 million lives in India [EB/OL]. (2021-07-21)[2021-08-27]. [https:// www.cgdev.org/article/bloomberg-covid-may-have-claimed-many-5-million-lives-india](https://www.cgdev.org/article/bloomberg-covid-may-have-claimed-many-5-million-lives-india).

[30] Center for Global Development. BBC Newshour: India COVID deaths may be ten times the official rate[EB/OL]. (2021-07-20)[2021-08-27]. [https:// www.cgdev.org/article/bbc-newshour-india-covid-deaths-may-be-ten-times-official-rate](https://www.cgdev.org/article/bbc-newshour-india-covid-deaths-may-be-ten-times-official-rate).

(编辑 武红江 亢列梅)

<http://zkxb.xjtu.edu.cn>